19/11/18

Λύση: $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, (x_0, y_0) σ.σ. του U

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x,y) \in U \cap B((x_0,y_0),\delta) \setminus \{(x_0,y_0)\} : |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow (x,y) \in U$ και $0 < \|(x-x_0, y-y_0)\| < \delta$

$\Leftrightarrow \forall (x_\nu, y_\nu) \in U \setminus \{(x_0,y_0)\}$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$:

$: f(x_\nu, y_\nu) \to \ell$

Επίσης: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \Leftrightarrow f$ συνεχής στο (x_0,y_0) : $\Leftrightarrow$

$\forall ((x_\nu, y_\nu)) \subset U$ με $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$
$f(x_\nu, y_\nu) \to f(x_0, y_0)$

$\left[\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0) \quad \left[\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\nu}}_{x_\nu} \to 0 \text{ η } \underbrace{\frac{1}{\nu}}_{y_\nu} \to 0 \right] \right.$

αλλά και:
$f\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{2\nu} \to 0 \ \Big]$

Ερώτημα: Τι κάνω όταν θέλω νδο η f είναι ~~συν~~ ασυνεχής στο (x_0,y_0) (δηλ. μη συνεχής = δεν είναι συνεχής στο (x_0,y_0))?

1. να πάρω 2 ακολουθίες

π.χ. $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$

και $(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \to (x_0, y_0)$

και να δείξω ότι: $f(x_\nu, y_\nu) \to \ell_1 \in \mathbb{R}$

$f(\tilde{x}_\nu, \tilde{y}_\nu) \to \ell_2 \in \mathbb{R}$

με $\boxed{\ell_1 \neq \ell_2}$

(αυτό σημαίνει κάτι γενικότερο: ότι δεν υπάρχει <u>το όριο</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

② να βρω μια ακολουθία $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,0)$ έτσι ώστε το $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(x_\nu,y_\nu)$ να μην υπάρχει (και

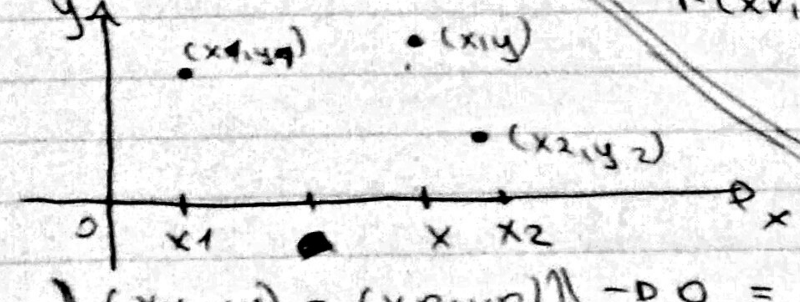
αυτό σημαίνει το γενικότερο ότι το: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ <u>δεν</u> υπάρχει

③ να δείξω ότι: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \neq f(x_0,y_0)$

④ να βρω μια ακολ. $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$ με $f(x_\nu,y_\nu)\not\to f(x_0,y_0)$

<u>Λύση</u>: Αυτό που ισχυρίζεται η εκφώνηση είναι <u>ΛΑΘΟΣ</u>.
Η f αυτή, είναι συνεχής στο $(0,0)$

$f(x,y)=x$
Είναι συνεχής στο (x_0,y_0) [οποιοδήποτε], αφού
$\forall \boxed{(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)}$ $\quad f(x_\nu,y_\nu)=\boxed{x_\nu \to x_0}$



$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{|x_\nu - x_0| \to 0}$

$\iff x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0 \iff$
$\|(x_\nu,y_\nu)-(x_0,y_0)\| \to 0 = (x_\nu-x_0, y_\nu-y_0) =$
$= \sqrt{(x_\nu-x_0)^2+(y_\nu-y_0)^2}$

Γιατί η f είναι συνεχής στο $(0,0)$?

<u>1ος τρόπος</u> (ε - δ - ορισμός): Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλω να βρω ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ με: $\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| < \delta$ να ισχύει:

$$|f(x,y) - \underset{\substack{\| \\ f(0,0)}}{0}| = |f(x,y)| < \varepsilon$$

Για $(x,y) = (0,0)$ αυτό ισχύει (αφού $|f(0,0)| = 0$)

Για $(x,y) \neq (0,0)$ πρέπει να ισχύει: $|f(x,y)| = \dfrac{|x \cdot y^2|}{x^2+y^2} < \varepsilon$

(και με $x^2+y^2 < \delta^2$ $\quad |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| =$ $\dfrac{|x||y^2|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = \boxed{\|(x,y)\|}$

Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon$

<u>2ος τρόπος</u> (ακολουθιακός)

Έστω $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$ δηλ. $\|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0$

Θ.δ.ο: $|f(x_\nu, y_\nu)| \to \underset{\substack{\| \\ f(0,0)}}{0}$

S.O.S.

Αν $(x_\nu, y_\nu) = (0,0)$ τότε: $|f(x_\nu, y_\nu)| = 0$ αν $(x_\nu, y_\nu) \neq (0,0)$, τότε:

$|x| \leq \|(x,y)\|$

$$|f(x_\nu, y_\nu)| = \frac{|x_\nu| |y_\nu|^2}{x_\nu^2 + y_\nu^2} = \frac{|x_\nu| \cdot |y_\nu|^2}{\|(x_\nu, y_\nu)\|^2} \leq \frac{\|(x_\nu, y_\nu)\|^3}{\|(x_\nu, y_\nu)\|^2} = \|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0 \\ &|f(x_\nu, y_\nu)| \leq \|(x_\nu, y_\nu)\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow |f(x_\nu, y_\nu)| \to 0$$

→ Δ.Ο. η $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

<u>Λύση:</u> Για να δούμε πού πρέπει να πηγαίνει η f, δοκιμάζουμε με μια τυχαία $(x_\nu,y_\nu)\to(0,0)$, όσο γίνεται απλή, π.χ. $(x_\nu,y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu},0\right)$. Βλέπουμε ότι:

$f\left(\frac{1}{\nu},0\right) = 0 \to 0$. Άρα θα πρέπει $\forall (x_\nu,y_\nu)\to(0,0)$ να ισχύει: $f(x_\nu,y_\nu)\to 0$

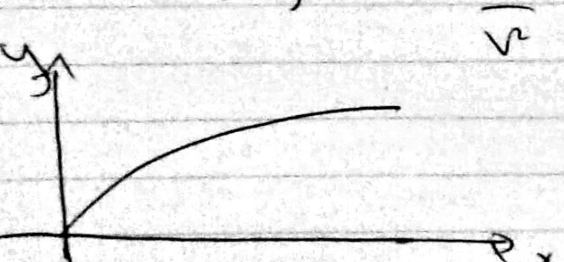
Όμως αυτό δεν ισχύει αφού π.χ. για $(x_\nu,y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)\to(0,0)$

έχουμε: $f\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right) = \dfrac{\frac{1}{\nu^3}}{\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^4}} =$

$= \dfrac{\frac{1}{\nu}}{1+\frac{1}{\nu^2}} \to 0$ (ΑΚΥΡΟ!)

Αλλά αν $(x_\nu,y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\to(0,0)$ και

$f\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right) = \dfrac{\frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^2}} = \frac{1}{2} \not\to 0$



<u>Ασκ.</u> 26, 29, 30